التمرين 1

A- لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي المعرفة على $]0,+\infty[$ بمايلي

$$f(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$.

1) أحسب : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2) بين أن f قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$ ثم أحسب $f'(x)$

3) لتكن u الدالة العددية لمتغير حقيقي المعرفة على $]0,+\infty[$ بمايلي

$$u(x)=\ln x+x-3$$

أ) أدرس تغيرات الدالة u .

ب) بين أن المعادلة $u(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[2,3]$ ثم تحقق من أن : $2,20<\alpha<2,21$.

ج) أدرس إشارة $u(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

4) أ) أدرس تغيرات الدالة f .

ب) أكتب $\ln\alpha$ على شكل $P(\alpha)$ حيث P حدودية من الدرجة الأولى ؛ و بين أن : $f(\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$ ؛ ثم استنتج تأطيرا للعدد $f(\alpha)$ سعته 2×10^{-2} .

5) أ) حدد إشارة $f(x)$.

ب) أنشئ (C_f) .

B- دراسة دالة أصلية للدالة f على المجال $]0,+\infty[$.

لتكن F الدالة الأصلية للدالة f على $]0,+\infty[$ التي تنعدم في 1 .

ليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة F في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) أ) أدرس تغيرات الدالة F على $]0,+\infty[$ ؛ دون حساب $F(x)$.

ب) ماذا يمكن أن تقول بالنسبة للمماسين (T_1) و (T_2) للمنحنى (Γ) في النقطتين اللتين أفصولاهما على التوالي 1 و e^2 ؟

2) حساب $F(x)$:

أ) ليكن $x>0$. أحسب : $\int_1^x \ln t\,dt$ (يمكن استعمال مكاملة بالأجزاء) . ثم أحسب $\int_1^x \frac{\ln t}{t}dt$.

ب) بين أن : $\forall x>0: f(x)=\ln x-\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-2$.

ج) استنتج $F(x)$ بدلالة x .

3) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to 0^+} F(x)$ (تذكير : $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$)

ب) بين أن :

$$\forall x>1: F(x)=x\ln x\left(1-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}+\frac{2}{x}-\frac{3}{\ln x}\right)+3$$

ثم أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

ج) ضع جدول تغيرات الدالة F .

د) أنشئ (Γ) في نفس الشكل السابق .

4) حساب المساحات :

أحسب ؛ ب cm^2 ؛ مساحة الحيز المستوي الذي يحده المنحنى (C_f) ومحور الأفاصيل والمستقيمين المعرفين بالمعادلتين : $x=1$ و $x=e^2$.

التمرين 2 :

A - لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي المعرفة على $]-1,+\infty[$ بمايلي : $f(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$.

1) أحسب وحدد إشارة $f'(x)$ ؛ ثم ضع جدول تغيرات f .

2) أحسب $f(0)$ ؛ ثم بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل بالضبط حلين : نرمز لأحدهما ب α حيث $\alpha\in[-0,72;-0,71]$.

3) حدد إشارة $f(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$.

B - لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]-1,0[\cup]0,+\infty[$ بمايلي:

$$g(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

1) دراسة الدالة g على محدات حيز تعريفها :

أ) أحسب : $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x)$.

ب) أحسب : $\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

2) تغيرات الدالة g :

أ) أحسب وحدد إشارة $g'(x)$ (يمكن استعمال الجزء A)

ب) بين أن : $g(\alpha)=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$.

استنتج قيمة مقربة ل $g(\alpha)$ ؛ نعتبر $\alpha\approx-0,715$.

3) جدول تغيرات g و التمثيل المبياني ل g :

أ) ضع جدول تغيرات الدالة g .

ب) أنشئ المنحنى الممثل للدالة g في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (الوحدة = 2cm)

4) حساب المساحات :

ليكن $a>0$. نضع : $I(a)=\int_1^a g(x)dx$.

أ) أعط ؛ تبعا لقيم a ؛ تأويلا هندسيا للعدد الحقيقي $I(a)$.

ب) بملاحظة : $\forall x\in]0,+\infty[: \frac{1}{x(1+x)}=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}$ ، أحسب $I(a)$. (يمكن استعمال مكاملة بالأجزاء) .

ج) أحسب : $\lim\limits_{a\to+\infty} I(a)$ و $\lim\limits_{a\to 0^+} I(a)$.

التمرين 3 :

لتكن f الدالة العددية لمتغير حقيقي المعرفة على $[0,+\infty[$ بمايلي :

$$\begin{cases} f(x)=x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)+\dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2} & ; \quad x>0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} & ; \quad x=0 \end{cases}$$

وليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$.

$\boxed{I}$ - لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0,+\infty[$ بمايلي:

$$g(x)=\ln(x+2)-\ln x-\frac{2}{x+2}+\frac{1}{4}$$

1) أ) أدرس تغيرات الدالة g .

ب) حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

ج) إستنتج إشارة $g(x)$ لكل $x\in]0,+\infty[$.

2) بين أن : $\forall x\in[2,3]: g(x)<\dfrac{1}{2}$.

$\boxed{II}$ - 1) أحسب : $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)$. (يمكن وضع : $t=\dfrac{1}{x}$)

2) أدرس قابلية اشتقاق الدالة g في النقطة 0 ؛ ثم أعط تأويلا هندسيا للنتيجة المحصلة .

3) أدرس تغيرات الدالة f . (نتحقق من أن : $f'(x)=g(x)$)

4) أ) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(\dfrac{x+2}{x}\right)=2$.

(يمكن استعمال : $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$)

ب) إستنتج : $\lim\limits_{X\to+\infty} f(X)$.

ج) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=\dfrac{x}{4}+\dfrac{5}{2}$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

5) أنشئ في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$ ؛ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) و المستقيم (D) ذو المعادلة : $y=x$.

التمرين4 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]-\infty,1[$ بما يلي :

$$f(x)=\frac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}$$

وليكن (Γ) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=2cm$.

$\boxed{I}$ 1) أ) نضع $t=\dfrac{2}{x-1}$. تحقق من أن :

$\dfrac{2}{(x-1)^2}e^{\frac{x+1}{x-1}}=\dfrac{e}{2}t^2e^t$ ؛ ثم استنتج $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$.

ب) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

2) أ) لتكن u الدالة العددية المعرفة على $]-\infty,1[$ بما يلي :

$u(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}$. أحسب $u'(x)$ لكل $x\in]-\infty,1[$.

ب) بين أن : $f'(x)=\dfrac{-4x}{(x-1)^4}e^{\frac{x+1}{x-1}}$ لكل $x\in]-\infty,1[$.

3) أدرس تغيرات الدالة f .

4) أنشئ المنحنى (Γ) .

$\boxed{II}$ 1) حدد دالة أصلية للدالة f على المجال $]-\infty,1[$.

2) ليكن $0<\alpha<1$. حدد $g(\alpha)=\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x)dx$.

3) أحسب : $\lim\limits_{\substack{\alpha\to1\\\alpha<1}} g(\alpha)$.

4) أحسب مساحة الحيز المستوي الذي يحده المنحنى (Γ) ومحور الأفاصيل والمستقيمين اللذين معادلتيهما هما $x=-1$ و $x=1$. (ب cm^2)

$\boxed{III}$ 1) أ) بين أن المعادلة $f(x)=\dfrac{1}{2}$ تقبل حلين 1- و β الحل الآخر .

ب) حدد تأطيرا للعدد β سعته 10^{-2} .

2) ليكن $a\in]-\infty,1[$. حدد مبيانيا ، تبع لقيم a ، عدد حلول المعادلة : $f(x)=f(a)$.

التمرين 5 :

$\boxed{I}$ لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي :

$$f(x)=e^{-x}\left(\cos(x)+\sin(x)\right)$$

1) أ) أحسب $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ بدلالة $\cos(x)$ و $\sin(x)$ ؛ ثم استنتج أن : $\forall x\in IR \quad ; \quad f(x)=\sqrt{2}e^{-x}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

ب) حل في IR المعادلة $f(x)=0$.

ج) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

2) أ) بين أن : $\forall x\in IR \quad ; \quad f'(x)=-2e^{-x}\sin(x)$.

ب) حل في IR المعادلة $f'(x)=0$.

3) نعتبر المجال $I=\left[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}\right]$.

أ) حدد إشارة $f'(x)$ على I ثم أعط جدول تغيرات الدالة f على المجال I .

ب) ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=2,5cm$; $\|\vec{j}\|=10cm$. أنشئ الجزء من المنحنى (C_f) المكون من النقط التي أفاصيلها تنتمي إلى المجال I .

$\boxed{II}$ 1) أ) بين أن $\left(-f-\dfrac{1}{2}f'\right)$ دال أصلية للدالة f على I .

ب) بين أن الدالة العددية G المعرفة على IR بما يلي : $G(x)=-e^{-x}\cos(x)$ دالة أصلية للدالة f على IR .

ج) بين أن : $G(x+\pi)=-e^{-\pi}G(x)$; $\forall x\in IR$.

2) نعتبر المتتالية العددية $(I_k)_{k\in IN}$ المعرفة بما يلي :

$$I_k=\int_{-\frac{\pi}{4}+k\pi}^{\frac{3\pi}{4}+k\pi} f(x)dx \quad ; \quad \forall k\in IN .$$

أ) أحسب I_0 و I_1 .

ب) أعط تأويلا هندسيا للعدد الحقيقي $|I_0|+|I_1|$.

ج) بين أن : $I_{k+1}=-e^{-\pi}I_k$; $\forall k\in IN$.

د) إستنتج I_k بدلالة k و I_0 .

التمرين 6 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على IR بما يلي :

$$f(x)=\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right)$$

1) أدرس تغيرات الدالة f .

2) أ) أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) بين أن : $f(x)=x+\ln 2+\ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$.

إستنتج $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) ليكن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=3cm$.

أ) بين أن المستقيم $(\Delta): y=x+\ln 2$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

ب) بين أن نقطة تقاطع مقاربي المنحنى (C_f) ؛ تنتمي إلى (C_f) .

ج) أدرس الوضع النسبي ل (C_f) ومقاربيه .

د) أعط معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها 0 .

4) أنشئ المنحنى (C_f) .

التمرين 7 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1,4[$ بما يلي :

$$f(x)=2\ln\left(\frac{4(x+1)}{4-x}\right)$$

في الجزء $\boxed{I}$ سندرس الدالةالعددية f وسنحسب التكامل التالي : $J=\int_0^2 f(x)dx$ ؛ وفي الجزئين $\boxed{II}$ و $\boxed{III}$ سندرس طريقتين لتحديد قيمة مقربة للعدد الحقيقي J .

$\boxed{I}$ 1) بين أن :

$$\forall x\in]-1,4[\quad ; \quad f(x)=2\ln(x+1)-2\ln(4-x)+4\ln 2$$

أحسب $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f على $]-1,4[$.

2) أنشئ (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$ حيث : $\|\vec{i}\|=3cm$ و $\|\vec{j}\|=1cm$.

3) أ) أحسب $F(x)=\int_1^x 2\ln t\,dt$ لكل $x>0$.

ب) نعتبر الدالتين h و H المعرفتين على المجال $]-1,4[$ بمايلي:

$h(x)=2\ln(x+1)-2\ln(4-x)$ و

$H(x)=F(x+1)+F(4-x)$.

بين أن H دالة أصلية للدالة h على المجال $]-1,4[$.

ج) أحسب قيمة J .

$\boxed{II}$ لتكن الحدودية $P(x)=ax^2+bx+c$ حيث a و b و c ثلاثة أعداد حقيقية .

1) حدد الأعداد الحقيقية a و b و c بحيث :

$P(0)=f(0)$ و $P(1)=f(1)$ و $P(2)=f(2)$.

2) نعتبر فيمايلي :

$$P(x)=(-5\ln 2+3\ln 3)x^2+(11\ln 2-5\ln 3)x$$

أحسب : $I=\int_0^2 P(x)dx$.

3) أحسب $|J-I|$. باستعمال آلة حاسبة ، أعط قيمة مقربة للخارج $\dfrac{|J-I|}{J}$ إلى 10^{-3} .

$\boxed{III}$

1) نعتبر (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها $\frac{3}{2}$.

حدد معادلة ديكارتية ل (T) على شكل $y=t(x)$. أنشئ (T) .

2) نضع : $g(x)=f(x)-\frac{8}{5}x+\frac{12}{5}-4\ln 2$ لكل $x\in]-1,4[$

أ) أدرس إشارة $g'(x)$.

ب) أدرس إشارة g . أول هندسيا هذه النتيجة .

ج) أحسب : $K=\int_0^2 t(x)dx$.

أعط تأويلا هندسيا للعدد $|J-K|$.

باستعمال آلة حاسبة ، حدد قيمة عشرية مقربة للعدد $\dfrac{|J-K|}{J}$ إلى 10^{-3} .

بالتوفيق إنشاء الله